Über die Wurzel aus der Klein-Gordon-Gleichung als Schrödinger-Gleichung eines relativistischen Spin-0-Teilchens

H.-J. Briegel, B.-G. Englert, M. Michaelis, und G. Süssmann
Sektion Physik, Universität München, Garching

Z. Naturforsch. **46 a,** 925–932 (1991); eingegangen am 12. September 1991

Die explizite Form des nichtlokalen Operators $[(m\,c)^2-(\hbar\,\nabla)^2]^{1/2}$ als Integraloperator wird für $m \geqq 0$ auf $\mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^3)$ berechnet. Das Eigenwertproblem $c\left[(m\,c)^2-\hbar^2\,\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\right]^{1/2}\psi(x)=[E-U(x)]\,\psi(x)$ wird für δ-artige Potentiale und für den Oszillator diskutiert.

On the Square-Root Klein-Gordon Equation as Schrödinger Equation for Spin 0

We give an explicit expression for the non-local operator $[(m\,c)^2-(\hbar\,\nabla)^2]^{1/2}$ on $\mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^3)$ for $m \geqq 0$. The eigenvalue problem $c\left[(m\,c)^2-\hbar^2\,\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\right]^{1/2}\psi(x)=[E-U(x)]\,\psi(x)$ is discussed for δ-like potentials and for the oscillator.

I. Einleitung

Das Problem einer relativistischen Quantenmechanik ohne negative Energien ist altbekannt. Der natürlichste Kandidat für eine relativistische Schrödinger-Gleichung eines spinlosen Teilchens der Masse m und Ladung e scheint die positive Wurzel aus der Klein-Gordon-Gleichung zu sein, also

$$i\hbar\,\frac{\partial}{\partial t}\,\psi(t,\boldsymbol{x})=c\,\sqrt{m^2\,c^2+\left(-i\,\hbar\,\nabla-\frac{e}{c}\,\boldsymbol{A}(t,\boldsymbol{x})\right)^2}\;\psi(t,\boldsymbol{x}) + e\,\Phi(t,\boldsymbol{x})\,\psi(t,\boldsymbol{x}), \tag{1}$$

worin $\Phi, \boldsymbol{A}$ die elektromagnetischen Potentiale sind. Zwar hat Sucher [1] bereits 1963 gezeigt, daß Gl. (1) mit ψ als *skalarem Feld* mit lokalem Transformationsverhalten $\psi'(t',\boldsymbol{x}')=\psi(t,\boldsymbol{x})$ unter eigentlichen Poincaré-Transformationen keine relativistisch invariante Bedeutung besitzen kann. Dennoch hat (1) als Wellengleichung für eine *Amplitude* $\psi_t := \psi(t,.) \in L_2(\mathbb{R}^3, \mathrm{d}^3x)$ in jüngerer Zeit im Zusammenhang mit der Berechnung von gebundenen Quark-Antiquark-Systemen wieder einige Aufmerksamkeit erfahren [3–5]. Dabei geht es vornehmlich um die Lösung des Eigenwertproblems

$$[c\,\sqrt{m^2\,\mathrm{c}^2-(\hbar\,\nabla)^2}+U(\boldsymbol{x})]\,\psi(\boldsymbol{x})=E\,\psi(\boldsymbol{x}),$$
$$\int|\psi(\boldsymbol{x})|^2\,\mathrm{d}^3x=1, \tag{2}$$

mit einem konfinierenden Potential U, ohne daß dabei auf die Kovarianzfrage für die zugehörige zeitabhängige Schrödinger-Gleichung näher eingegangen wird.

In einer neueren Arbeit von Trübenbacher [6] wird Gl. (1) im Ortsraum $\psi_t \in L_2(\mathbb{R}^3, \mathrm{d}^3x)$ als eine Integralgleichung der Gestalt

$$i\,\hbar\,\partial_t\,\psi_t(\boldsymbol{x})=\int_{\mathbb{R}^3}\hbar\,\Omega(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\,\psi_t(\boldsymbol{x}')\,\mathrm{d}^3x' \tag{3}$$

mit nichtlokalem distributionellem Kern diskutiert und eine Kontinuitätsgleichung mit einer ungewohnten Form für die Wahrscheinlichkeitsdichte vorgeschlagen. Die Kovarianzfrage wird dabei nur im freien Fall behandelt [7].

In der vorliegenden Arbeit geben wir zunächst einen expliziten analytischen Ausdruck für die rechte Seite von (3) an. Als Beitrag zur Diskussion gebundener Zustände mit relativistischer Kinematik behandeln wir (2) mit δ-artigem und mit einem Oszillatorpotential. Die erhaltenen Lösungen dürfen jedoch, wie alle Lösungen von (2) [2–5], nur als eine Korrektur zu den nichtrelativistischen Spektren verstanden werden.

In der folgenden zweiten Arbeit [8] zeigen wir nämlich, daß (1) außer für ein Skalarfeld mit lokalem Transformationsverhalten $\psi'(t',\boldsymbol{x}')=\psi(t,\boldsymbol{x})$ auch für eine Amplitude $\psi_t(\boldsymbol{x}) \in L_2(\mathbb{R}^3, \mathrm{d}^3x)$ nicht relativistisch invariant sein kann. Allgemeiner heißt dies, daß die kanonische Quantisierung der Hamilton-Funktion eines spinlosen Teilchens in äußeren Maxwellfeldern auf kovariante Weise nicht möglich ist. Dasselbe gilt auch für eine verallgemeinerte minimale Einkopplung,

Sonderdruckanforderungen an Prof. Dr. G. Süssmann, Sektion Physik, Universität München, Am Coulombwall 1, W-8046 Garching, Germany.

0932-0784 / 91 / 1100-0925 \$ 01.30/0. – Please order a reprint rather than making your own copy.

bei der die Potentiale mit der Amplitude nichtlokal wechselwirken – ähnlich wie bei der zweikomponentigen Klein-Gordon-Gleichung in Foldy-Wouthuysen-Darstellung, sofern auf den Unterraum zu positiver Energie projiziert wird.

II. Freie Dynamik

Im Impulsraum lautet die vorliegende Bewegungsgleichung

$$i\hbar\,\partial_t\tilde{\psi}_t(\boldsymbol{k}) = \hbar\,\omega(\boldsymbol{k})\,\tilde{\psi}_t(\boldsymbol{k}), \quad \tilde{\psi}_t \in L_2(\mathbb{R}^3, \mathrm{d}^3k), \tag{4}$$

mit dem Dispersionsgesetz $\omega(\boldsymbol{k}) = c\sqrt{\varkappa^2+k^2}$, wobei die Konstante $\varkappa = \frac{mc}{\hbar}$ die inverse Comptonwellenlänge bezeichnet [10]. Durch die Fouriertransformation

$$\psi_t(\boldsymbol{x}) = \int \tilde{\psi}_t(\boldsymbol{k})\, e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^{3/2}} \tag{5}$$

gelangt man in den Ortsraum $L_2(\mathbb{R}^3, \mathrm{d}^3x)$. Dort ist (4) eine Integralgleichung mit nichtlokalem Kern, nämlich

$$\begin{aligned} i\,\partial_t\psi_t(\boldsymbol{x}) &= (c\sqrt{\varkappa^2-\nabla^2}\,\psi_t)\,(\boldsymbol{x}) \\ &:= \int_{\mathbb{R}^3} c\sqrt{\varkappa^2+k^2}\,\tilde{\psi}_t(k)\, e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^{3/2}} \\ &= \int\left(\int \omega(\boldsymbol{k})\, e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}\psi_t(\boldsymbol{x}') \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^{3/2}}\right)\frac{\mathrm{d}^3x'}{(2\pi)^{3/2}} \\ &= \lim_{\mu\to\infty}\int \Omega_\mu(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\,\psi_t(\boldsymbol{x}')\,\mathrm{d}^3x', \end{aligned} \tag{6}$$

wobei

$$\Omega_\mu(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') := \int_{|\boldsymbol{k}|\leq\mu} \omega(\boldsymbol{k})\, e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')} \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}. \tag{7}$$

Da das Integral in (7) für $\mu\to\infty$ divergiert, kann in (6) der Limes nicht mit der $\boldsymbol{x}'$-Integration vertauscht werden. Zur Vereinfachung der Diskussion können wir annehmen, daß ψ_t einen kompakten Träger besitze und beliebig oft differenzierbar sei, also $\psi_t \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^3)$, weil dieser Funktionenraum dicht in $L_2(\mathbb{R}^3, \mathrm{d}^3x)$ liegt.

Zunächst sei $\mu<\infty$. Nach Ausführen der Winkel-Integration erhält man für das Integral (7) folgendes:

$$\begin{aligned} \Omega_\mu(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') &= \frac{1}{2\pi^2}\,\frac{c}{r}\int_0^\mu \mathrm{d}k\sqrt{\varkappa^2+k^2}\;k\sin kr \\ &= R_\mu(r) - \frac{c}{2\pi^2}\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\int_0^\mu \mathrm{d}k\,\frac{\cos kr}{\sqrt{\varkappa^2+k^2}}, \\ & \qquad r := |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|, \end{aligned} \tag{8}$$

mit einem Randterm $R_\mu(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|)$, der nach Integration mit dem Faktor $\psi_t(\boldsymbol{x}') \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^3)$ im Limes $\mu\to\infty$ verschwindet. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \sqrt{\varkappa^2-\nabla^2}\,\psi_t(\boldsymbol{x}) = \lim_{\mu\to\infty}\int_{\mathbb{R}^3}&\left(\frac{-1}{2\pi^2}\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\right. \\ &\left.\cdot\left[\int_0^\mu \mathrm{d}k\,\frac{\cos kr}{\sqrt{\varkappa^2+k^2}}\right]\right)\psi_t(\boldsymbol{x}')\,\mathrm{d}^3x', \quad r = |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|. \end{aligned} \tag{9}$$

Das Integral in den eckigen Klammern konvergiert für $\mu\to\infty$ gegen die modifizierte Bessel-Funktion $K_0(\varkappa r)$. Allerdings gilt diese Konvergenz nicht gleichmäßig, sondern nur punktweise. Deshalb darf die Limesbildung in der Regel nicht mit der $\boldsymbol{x}'$-Integration und den Differentiationen vertauscht werden, es sei denn, man beschränkt sich auf Funktionen $\psi_t(\boldsymbol{x}')$, welche in der Umgebung von $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{x}$ die Form $\psi_t(\boldsymbol{x}') = |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^2\,W(\theta,\varphi) + \ldots$, mit einem rein winkelabhängigen Faktor $W(\theta,\varphi)$, besitzen.

Wegen der Translationsinvarianz genügt es, den Punkt $\boldsymbol{x}=0$ zu betrachten. Mittels Polarkoordinaten schreiben wir

$$\begin{aligned} \psi_t(\boldsymbol{x}') &= \psi_t(r',\theta',\varphi'), \\ \bar{\psi}_t(r) &:= \int_{(4\pi)} \psi(r,\theta,\varphi)\,\mathrm{d}\cos\theta\,\mathrm{d}\varphi. \end{aligned} \tag{10}$$

Wir bezeichnen den Unterraum der Funktionen, für die sich die winkelintegrierten Funktionen $\bar{\psi}_t(r)$ bei kleinen r wie bei r^2 verhalten, mit $\mathbb{H}_0$:

$$\mathbb{H}_0 := \{\psi_t \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^3)\colon \bar{\psi}_t(r) = \mathcal{O}(r^2) \quad \text{bei} \quad r\to 0\}. \tag{11}$$

Für $\psi_t \in \mathbb{H}_0$ läßt sich der μ-Limes in den eckigen Klammern in (9) ausführen, was man durch „Überwälzen" der Differentiationen auf ψ_t mittels partieller Integration leicht sieht. Das ergibt für den Integralkern (7) im Grenzfall beliebig großer μ im wesentlichen eine modifizierte Bessel-Funktion im folgenden Sinne:

$$\begin{aligned} &(\sqrt{\varkappa^2-\nabla^2}\,\psi_t)\,(\boldsymbol{0}) \\ &\quad = \frac{-\varkappa^2}{2\pi^2}\int \frac{K_2(\varkappa|\boldsymbol{x}'|)}{|\boldsymbol{x}'|^2}\,\psi_t(\boldsymbol{x}')\,\mathrm{d}^3x', \quad \psi_t \in \mathbb{H}_0. \end{aligned} \tag{12}$$

Dies beschreibt eine Distribution auf $\mathbb{H}_0$ gemäß

$$\Omega_2\colon\; \mathbb{H}_0 \ni \psi_t \mapsto \int_0^\infty K_2(\varkappa r)\,\bar{\psi}_t(r)\,\mathrm{d}r := \Omega_2[\psi_t] \in \mathbb{C}. \tag{13}$$

Um einen Ausdruck für den Operator $\sqrt{\varkappa^2-\nabla^2}$ auf ganz $\mathbb{H}$ zu erhalten, muß das Integral in (13), das für

$\psi_t \in \mathbb{H} \setminus \mathbb{H}_0$ divergiert, regularisiert werden. Man erreicht dies [11] durch analytische Fortsetzung von Ω_2 auf ganz $\mathbb{H}$. Dabei wird Ω_2 in eine Schar Ω_ν von Distributionen analytisch eingebettet, die in einem bestimmten Parameterbereich von ν auf dem gesamten Funktionenraum $\mathbb{H}$ regulär sind. Die analytische Fortsetzung der Integrale $\Omega_\nu[\psi]$ mit einem festen $\psi \in \mathbb{H}$ als Funktion von ν, ausgewertet bei $\nu = 2$, bestimmt dann die regularisierte Form von Ω_2.

Dazu erinnern wir zunächst daran, daß in dem Vertikalstreifen $D_0 := \{\nu \in \mathbb{C}: |\mathrm{Re}\,\nu| < 1\}$ die Identität

$$\int_0^\infty K_\nu(z)\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right) \tag{14}$$

besteht. Für $\nu \in D_0$ impliziert das die Aussage

$$\bar{\Omega}_\nu[\psi] := \int_0^\infty K_\nu(\varkappa r)\,\bar{\psi}_t(r)\,\mathrm{d}r = \int_0^\infty K_\nu(\varkappa r)\,(\bar{\psi}_t(r) - \bar{\psi}_t(0))\,\mathrm{d}r + \frac{1}{2\varkappa}\,\bar{\psi}_t(0)\,\Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right). \tag{15}$$

Wir schreiben dabei $\bar{\Omega}_\nu$ statt Ω_ν, da (15) auf *ganz* $\mathbb{H} = \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^3)$ definiert ist. Der mittlere Term von (15) konvergiert nur für $\nu \in D_0$, während die rechte Seite wegen $\bar{\psi}_t'(0) = 0$, also

$$\bar{\psi}_t(r) - \bar{\psi}_t(0) = \tfrac{1}{2} r^2\,\bar{\psi}_t''(0) + \ldots, \tag{16}$$

für festes $\psi_t \in \mathbb{H}$ eine analytische Funktion von ν auf $D := \{\nu \in \mathbb{C}, 0 \leq \mathrm{Re}\,\nu < 3, \nu \neq 1\}$ darstellt [12], nämlich gerade die analytische Fortsetzung der ν-Funktion $\bar{\Omega}_\nu[\psi]$ von D_0 auf ganz D. Insbesondere erhält man für $\nu = 2$ den Ausdruck

$$\int_0^\infty K_2(\varkappa r)\,(\bar{\psi}_t(r) - \bar{\psi}_t(0))\,\mathrm{d}r - \frac{\pi}{2\varkappa}\,\bar{\psi}(0), \tag{17}$$

was eine Regularisierung der Distribution (13), also eine analytische Ausdehnung ihres Definitionsbereiches auf ganz $\mathbb{H}$ definiert. Damit erhalten wir folgenden Energieoperator:

$$(\sqrt{\varkappa^2 - \nabla^2}\,\psi_t)(\mathbf{0}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{-\varkappa^2}{2\pi^2}\,\frac{K_2(\varkappa|\mathbf{x}'|)}{|\mathbf{x}'|^2}\,(\psi_t(\mathbf{x}') - \psi_t(\mathbf{0}))\,\mathrm{d}^3x' + \varkappa\,\psi_t(\mathbf{0}), \tag{18}$$

für $\psi_t \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^3)$, was (wie gesagt) in unserem Hilbert-Raum dicht liegt.

Zur Verifikation des nichtrelativistischen Grenzfalles betrachten wir Amplituden $\psi_t(\mathbf{x}')$, die sich im Bereich einer Compton-Wellenlänge nur schwach ändern. In das Integral (18) gehen dann nur die ersten Glieder einer Taylor-Entwicklung von $\psi_t(\mathbf{x}')$ um $\mathbf{x}' = \mathbf{x} = \mathbf{0}$ ein,

$$\psi_t(\mathbf{x}') = \psi_t(\mathbf{0}) + \sum_{i=1}^3 x_i\,\frac{\partial \psi_t}{\partial x_i}(\mathbf{0}) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^3 x_i x_j\,\frac{\partial^2 \psi_t}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{0}) + \ldots. \tag{19}$$

Eingesetzt in (18) liefert dies:

$$\sqrt{\varkappa^2 - \nabla^2}\,\psi_t(\mathbf{0}) = -\frac{\varkappa^2}{2\pi^2}\left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial \psi_t}{\partial x_i}(\mathbf{0}) \int_{\mathbb{R}^3} \frac{K_2(\varkappa|\mathbf{x}'|)}{|\mathbf{x}'|^2}\,x_i'\,\mathrm{d}^3x' + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial^2 \psi_t}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{0}) \int_{\mathbb{R}^3} \frac{K_2(\varkappa|\mathbf{x}'|)}{|\mathbf{x}'|^2}\,x_i' x_j'\,\mathrm{d}^3x' + \ldots\right) + \varkappa\,\psi_t(\mathbf{0}). \tag{20}$$

Der erste Term verschwindet aus Symmetriegründen, während in der zweiten Summe wegen der Winkelintegration nur die Terme mit $i = j$ von null verschiedene und jeweils gleiche Beiträge liefern:

$$\sqrt{\varkappa^2 - \nabla^2}\,\psi_t(\mathbf{0}) = \varkappa\,\psi_t(\mathbf{0}) - \frac{\varkappa^2}{2\pi^2}\,\nabla^2\psi_t(\mathbf{0})\,\frac{2\pi}{3}\int_0^\infty K_2(\varkappa r')\,r'^2\,\mathrm{d}r' + \ldots = \left(\varkappa - \frac{1}{2\varkappa}\,\nabla^2 + \ldots\right)\psi_t(\mathbf{0}). \tag{21}$$

Eine Betrachtung der Terme höherer Ordnung in (19) führt dann auf

$$c\,[\sqrt{\varkappa^2 - \nabla^2}\,\psi_t(\mathbf{0}) - \varkappa\,\psi_t(\mathbf{0})] = -\frac{c}{2\varkappa}\,\nabla^2\psi_t(\mathbf{0}) + c\,\mathcal{O}\left(\frac{1}{\varkappa^3}\right), \tag{22}$$

was für $c \to \infty$ (wobei $\varkappa = \hbar^{-1} m c$) den nichtrelativistischen Ausdruck ergibt.

Damit ist (18) als korrekte Regularisierung von (12) bestätigt. Nach einer Translation des Aufpunktes lautet das Resultat, also (6), schließlich

$$\frac{i}{c}\,\partial_t\,\psi_t(\mathbf{x}) = \sqrt{\varkappa^2 - \nabla^2}\,\psi_t(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{-\varkappa^2}{2\pi^2}\,\frac{K_2(\varkappa|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2}\,(\psi_t(\mathbf{x}') - \psi_t(\mathbf{x}))\,\mathrm{d}^3x' + \varkappa\,\psi_t(\mathbf{x}) \tag{23}$$

für $\psi_t \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^3) \underset{\text{dicht}}{\subset} \mathbb{H}$ [13].

In *einer räumlichen Dimension* geht die Argumentation analog, und man erhält

$$\frac{i}{c}\,\partial_t \psi_t(x) = \sqrt{\varkappa^2 - \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}}\,\psi_t(x)$$
$$= P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-\varkappa}{\pi} \frac{K_1(\varkappa|x-x'|)}{|x-x'|} (\psi_t(x') - \psi_t(x))\,\mathrm{d}x'$$
$$+ \varkappa\,\psi_t(x) \tag{24}$$

für $\psi_t \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, wobei P für den Hauptwert des Integrals steht.

Im Fall [15] *verschwindender Ruhmasse* (m = 0, skalares Luxon) hat man auf $\mathbb{H}_0$ zunächst

$$\sqrt{-\Delta}\,\psi_t(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{\pi^2} \int_{\mathbb{R}^3} |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^{-4}\,\psi_t(\boldsymbol{x}')\,\mathrm{d}^3x', \quad \psi_t \in \mathbb{H}_0. \tag{25}$$

Die analytische Fortsetzung des Integrals

$$\int_0^\infty \frac{1}{r^\alpha}\,\bar\psi_t(r)\,\mathrm{d}r = \int_0^1 \frac{1}{r^\alpha}\,[\bar\psi_t(r) - \bar\psi_t(0)]\,\mathrm{d}r + \int_1^\infty \frac{1}{r^\alpha}\,\bar\psi_t(r)\,\mathrm{d}r$$
$$+ \frac{1}{1-\alpha}\bar\psi_t(0), \quad 0 < \mathrm{Re}\,\alpha < 1 \tag{26}$$

durch die rechte Seite in den punktierten Streifen $\{\alpha \in \mathbb{C}\colon 0 < \mathrm{Re}\,\alpha < 3,\ \alpha \neq 1\}$ liefert die Regularisierung zu (25):

$$\sqrt{-\Delta}\,\psi_t(\boldsymbol{x}) = \int_{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'| \leq 1} [\psi_t(\boldsymbol{x}) - \psi_t(\boldsymbol{x}')] \frac{\mathrm{d}^3x'}{\pi^2|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^4}$$
$$- \int_{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'| > 1} \psi_t(\boldsymbol{x}') \frac{\mathrm{d}^3x'}{\pi^2|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^4} + \frac{4}{\pi}\,\psi_t(\boldsymbol{x}) \tag{27}$$

für $\psi_t \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^3)$. Man beachte, daß die Regularisierung im masselosen Fall *drei* Terme erfordert. (25) kann nicht etwa direkt aus (24) erhalten werden, indem man dort den Limes $\varkappa \to 0$ bildet. Es gilt zwar

$$\int_0^\infty \frac{-\varkappa^2}{2\pi^2} K_2(\varkappa r)\,\bar\psi(r)\,\mathrm{d}r \xrightarrow[(\varkappa \to 0)]{} \int_0^\infty \frac{-1}{\pi^2}\frac{1}{r^2}\,\bar\psi(r)\,\mathrm{d}r \tag{28}$$

im Fall $\psi \in \mathbb{H}_0$, andererseits

$$\int_0^\infty \frac{-\varkappa^2}{2\pi^2} K_2(\varkappa r)(\bar\psi(r) - \bar\psi(0))\,\mathrm{d}r$$
$$\xrightarrow[(\varkappa \to 0)]{\text{mitnichten}} \int_0^\infty \frac{-1}{\pi^2}\frac{1}{r^2}(\bar\psi(r) - \bar\psi(0))\,\mathrm{d}r \tag{29}$$

für $\psi \in \mathbb{H}$, so daß der Limes $\varkappa \to 0$ *vor* der Regularisierung zu bilden ist.

III. Einfache gebundene Systeme

Die Behandlung des Eigenwertproblems im Ortsraum, also

$$\hbar c \sqrt{\varkappa^2 - \nabla^2}\,\psi(\boldsymbol{x}) + U(\boldsymbol{x})\,\psi(\boldsymbol{x}) = E\,\psi(\boldsymbol{x}) \tag{30}$$

mit einem skalaren Potential $U(\boldsymbol{x})$ und dem Integraloperator $\sqrt{\varkappa^2 - \nabla^2}$ wie in (23), ist eine nichttriviale Angelegenheit. Bereits die einfachsten eindimensionalen Systeme der nichtrelativistischen Quantenmechanik, wie zum Beispiel der endliche Potentialtopf, sind im relativistischen Fall wegen der nichtlokalen Struktur des Wurzeloperators sehr kompliziert. Ausnahmen bilden das δ-Potential, schmale Potentialtöpfe und das Oszillatorpotential; diese wollen wir hier noch kurz vorstellen.

III. a. Schmaler Kasten: $U(x) = -U_0\,\theta(a^2 - x^2)$ mit $a \ll 1/\varkappa$ und $U_0 > 0$

Mit der Fourier-Transformierten $\tilde U(k) = -U_0 \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin(k a)}{k}$ lautet die Eigenwertgleichung im Impulsraum wie folgt:

$$(\hbar c \sqrt{\varkappa^2 + k^2} - E)\,\tilde\psi(k)$$
$$= U_0 \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin(k' a)}{k'}\,\tilde\psi(k-k')\,\mathrm{d}k'. \tag{31}$$

Für Kästen, die viel schmaler als die Compton-Wellenlänge des Teilchens sind, $a \ll 1/\varkappa$, bleibt $(k a)^{-1} \sin(k a)$ praktisch konstant in dem Bereich, wo $\tilde\psi(k)$ wesentlich von null verschiedene Werte besitzt, wie in Abb. 1 skizziert. In diesem Fall kann $\tilde U(k)$ auf der rechten Seite von (31) vor das Integral gezogen werden, und man erhält für Bindungszustände ($E < m c^2 = \hbar c \varkappa$) die Gleichung

$$\tilde\psi(k) = \psi(0)\,U_0 \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin k a}{k}\frac{1}{\hbar c\sqrt{\varkappa^2 + k^2} - E}. \tag{32}$$

Nach Integration über k liefert dies die Quantisierungsbedingung

$$1 = \frac{2 U_0}{\pi \hbar c} \int_0^\infty \frac{\sin(k a)\,\mathrm{d}k}{k(\sqrt{\varkappa^2 + k^2} - E/\hbar c)}, \quad E/\hbar c < \varkappa, \tag{33}$$

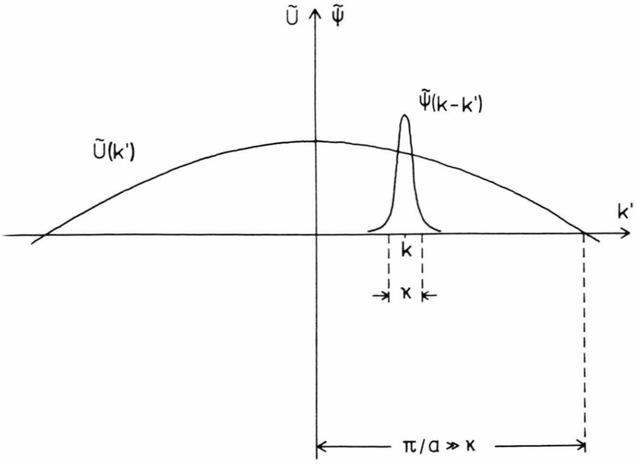

Abb. 1. Schematische Skizze von $\tilde{U}(k')$ für einen sehr schmalen Kasten und von der Wellenfunktion $\tilde{\psi}(k-k')$, jeweils als Funktion von k'.

wobei die Fälle $\psi(0)=0$ oder $\psi(0)=\pm\infty$ wegen der geforderten Normierbarkeit von $\tilde{\psi}(k)$ gemäß (32) ausgeschlossen sind. Wegen (33) gibt es für beliebig vorgegebene $U_0>0$, $a>0$ stets mindestens einen Bindungszustand. Allerdings strebt dessen Energie im Limes $a\to 0$ bei festgehaltenem „Topfvolumen" $\phi_0=2\,U_0\,a$ gegen minus unendlich. Mit der reskalierten Energie $\varepsilon := \frac{Ea}{\hbar c}<0$ nimmt nämlich die Eigenwertgleichung (33) im Limes $a\to 0$ die Gestalt

$$1=\frac{\phi_0}{\hbar c\pi}\int_0^\infty \mathrm{d}y\,\frac{\sin y}{y(y-\varepsilon)}, \tag{34}$$

an, also

$$E=-\frac{|\varepsilon|\,\hbar c}{a}\to-\infty \quad \text{für} \quad a\to 0. \tag{35}$$

Da dieser Limes dem Übergang zu einem δ-Potential gemäß

$$-U_0\,\theta(a^2-x^2)=-\phi_0\,\frac{1}{2a}\,\theta(a^2-x^2)\to-\phi_0\,\delta(x) \qquad (a\to 0) \tag{36}$$

entspricht, folgt daraus, daß das eindimensionale δ-Potential bei relativistischer Kinematik nicht zu schwach ist, um einen Zustand zu binden, sondern eher zu stark, worauf wir im folgenden Abschnitt näher eingehen.

Übrigens ist die Gesamtzahl der gebundenen Zustände, wie eine halbklassische Zählung ergibt, ungefähr gleich $\phi_0/(\pi\hbar c)$, also durch das Topfvolumen bestimmt, und bleibt im Limes $a\to 0$ beschränkt, obwohl die Bindungsenergie des Grundzustandes nach (35) über alle Grenzen wächst.

III. b. Delta-Potential: $U(x)=-\phi_0\,\delta(x)$ *mit* $\phi_0>0$

Für das attraktive Delta-Potential hat die zu (33) analoge Eigenwertgleichung die Form

$$1=\frac{\phi_0}{\hbar c\pi}\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}k}{\sqrt{\varkappa^2+k^2}-E/\hbar c}, \quad E/\hbar c<\varkappa, \tag{37}$$

wobei hier keine Näherungen erforderlich sind. Wegen der logarithmischen Divergenz des Integrals besitzt (37) keine Lösung E [17]. Tatsächlich ist der Hamilton-Operator

$$\hat{H}=\hbar c\sqrt{\varkappa^2+\hat{k}^2}-\phi_0\,\delta(\hat{x}) \tag{38}$$

nach unten nicht beschränkt, was bereits am Verhalten des Grundzustandes im Kastenpotential im oben diskutierten Grenzübergang sichtbar wird. Unter einer Skalentransformation

$$\hat{x}\to\lambda\hat{x}, \quad \hat{k}\to\hat{k}/\lambda \tag{39}$$

reskaliert sich ein Energieerwartungswert gemäß

$$\langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle\to\frac{1}{\lambda}\langle\psi|\hbar\sqrt{(\varkappa\lambda)^2+\hat{k}^2}-\phi_0\,\delta(\hat{x})|\psi\rangle. \tag{40}$$

Im Limes $\lambda\to 0$ erhält man

$$\lambda\langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle\to\langle\psi|\hbar\sqrt{\hat{k}^2}-\phi_0\,\delta(\hat{x})|\psi\rangle=:E_0. \tag{41}$$

Für die normierten Wellenfunktionen

$$\tilde{\psi}_\nu(k):=\frac{1}{\sqrt{2k_0\,\nu!}}\,\mathrm{e}^{-1/2\,|k/k_0|^{1/\nu}}, \quad \nu>0, \tag{42}$$

findet man den Wert

$$E_0=k_0\,2^{2\nu-1/2}\,\frac{\Gamma(\nu+1/2)}{\sqrt{2\pi}}\left[1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\phi_0\,\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\right]. \tag{43}$$

Wählt man nun ν hinreichend groß, so wird E_0 negativ, was zur Folge hat, daß es eine untere Schranke des Hamilton-Operators tatsächlich nicht geben kann [18].

III. c. Relativistischer Oszillator: $U(x)=\frac{1}{2}f_0\,x^2$ *mit* $f_0>0$

Das Oszillatorpotential hat gegenüber anderen Potentialen die angenehme Eigenschaft, daß die zugehörige Eigenwertgleichung im Impulsraum eine gewöhnliche Differentialgleichung Schrödingerscher Form abgibt:

$$\left\{-\frac{1}{2} f_0 \frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{k}^2} + \sqrt{m^2 c^4 + \hbar^2 c^2 \boldsymbol{k}^2} - E\right\} \tilde{\psi}(\boldsymbol{k}) = 0 \quad (44)$$

mit $\tilde{\psi}(\boldsymbol{k}) \to 0$ für $|\boldsymbol{k}| \to \infty$.

Eine numerische Behandlung hiervon wurde in [3] in einem anderen Zusammenhang durchgeführt und lieferte Werte $E_{n,l}$ für $n = 1, \ldots, 5$; $l = 0, 1, 2$.

Wir behandeln den eindimensionalen Fall mit Hilfe der WKB-Methode und störungstheoretisch im schwachrelativistischen Grenzfall. Außerdem wird der Fall verschwindender Ruhemasse diskutiert.

In einer Dimension und in der Variablen $\xi := k/m\omega_0$, $\omega_0 := \sqrt{f_0/m}$ (Grundfrequenz im nichtrelativistischen Limes) lautet (44) wie folgt:

$$\left\{-\frac{1}{2m} \frac{d^2}{d\xi^2} + U(\xi)\right\} \chi(\xi) = E \chi(\xi) \quad (45)$$

mit dem „Wurzelpotential“

$$U(\xi) = m c^2 \sqrt{1 + \left(\frac{\hbar \omega_0}{c}\right)^2 \xi^2} \quad \text{und} \quad \chi(\xi) = \tilde{\psi}(k).$$

Das Potential $U(\xi)$ kann im schwachrelativistischen Limes, wo $\chi(\xi)$ wesentlich von null verschiedene Werte nur für $\left(\frac{\hbar \omega_0}{c} \xi\right)^2 = \left(\frac{\hbar k}{m c}\right)^2 \ll 1$ besitzt, störungstheoretisch behandelt werden,

$$U(\xi) = m c^2 + \frac{1}{2m} (m \hbar \omega_0 \xi)^2 - \frac{1}{8 m^3 c^2} (m \hbar \omega_0 \xi)^4 + \ldots$$

$$= U_0(\xi) - \frac{1}{8 m^3 c^2} (m \hbar \omega_0 \xi)^4 + \ldots, \quad (46)$$

mit $U_0(\xi)$ als ungestörtem Potential mit den bekannten Eigenwerten und Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators.

Der schwachrelativistische Oszillator entspricht also im Impulsraum einem nichtrelativistischen anharmonischen Oszillator. Gewöhnliche Störungstheorie 1. Ordnung liefert für die Energieeigenwerte sofort

$$E_n^{(1)} = m c^2 + \hbar \omega_0 \left[\left(n + \frac{1}{2}\right) - \frac{3}{16} \left(\frac{\hbar \omega_0}{m c^2}\right) \cdot \left(n^2 + \mathrm{n} + \frac{1}{2}\right) + \mathcal{O}\left(\left(\frac{\hbar \omega_0}{m c^2}\right)^2\right)\right] \quad (47)$$

mit $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Um zu einer guten Näherung auch für hohe Quantenzahlen und nicht nur im schwachrelativistischen Fall zu gelangen, behandeln wir das Problem mit der WKB-Methode. Die Quantisierungsbedingung lautet hier

$$\int_{-x_0}^{x_0} p(x)\, dx = \pi \hbar (n + \tfrac{1}{2}) \quad (48)$$

mit $n = 0, 1, 2, \ldots$ und $p(x) = c^{-1}((E - \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2)^2 - m^2 c^4)^{1/2}$ als dem kinetischen Impuls des Teilchens im Oszillatorpotential $U(x) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2$ und mit den klassischen Umkehrpunkten $x_0 = \omega_0^{-1} \sqrt{2(E/m - c^2)}$. Durch einige elementare Umformungen können wir das Integral in (48) als vollständiges elliptisches Integral schreiben:

$$\int_0^{x_0} \left[\left(E - \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2\right)^2 - m^2 c^4\right]^{1/2} dx$$

$$= m \omega_0 c \int_0^{x_0} \left[(x_0^2 - x^2)\left(1 + \frac{\omega_0^2}{4 c^2}(x_0^2 - x^2)\right)\right]^{1/2} dx$$

$$= \left[1 + \left(\frac{\omega_0 x_0}{2c}\right)^2\right]^{1/2} \cdot m c \omega_0 x_0^2 \int_0^1 \sqrt{(1 - y^2)(1 - K^2 y^2)}\, dy \quad (49)$$

$$= \frac{4 m c^3}{\omega_0} \frac{K^2}{(1 - K^2)^{3/2}} \int_0^1 \sqrt{(1 - y^2)(1 - K^2 y^2)}\, dy,$$

wobei im zweiten Schritt auf $y := x/x_0$ transformiert und die Abkürzung $K^2 = \frac{E - m c^2}{E + m c^2} < 1$ eingeführt wurde. Bedingung (48) lautet damit

$$\frac{\hbar \omega_0}{m c^2}\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{8}{\pi} \frac{K^2}{(1 - K^2)^{3/2}} \int_0^1 \sqrt{(1 - y^2)(1 - K^2 y^2)}\, dy, \quad (50)$$

$$= \frac{4}{\pi} \frac{K^2}{(1 - K^2)^{3/2}} [E_0(K) + E_1(K)],$$

worin die vollständigen elliptischen Integrale 2. Gattung

$$E_m(K) := \int_0^{\pi/2} \cos(2 m \alpha) \sqrt{1 - K^2 \sin^2 \alpha}\, d\alpha, \quad (51)$$

$m = 0, 1, 2, \ldots$, auftreten [19]. Gleichung (50) bestimmt das WKB-Spektrum des Oszillators in geschlossener Form [20].

Im *schwachrelativistischen Limes* ($|E - m c^2| \ll m c^2$) können die elliptischen Integrale nach

$$K^2 = \frac{E - m c^2}{E + m c^2} =: \frac{e}{e + 2 m c^2}$$

entwickelt werden, mit dem Resultat

$$\frac{\hbar\omega_0}{mc^2}\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{e}{mc^2}\left(1+\frac{3}{16}\frac{e}{mc^2}+\dots\right) \quad (52)$$

bis zur zweiten Ordnung in e/mc^2. Eine Invertierung der Entwicklung liefert

$$\begin{aligned} e &= E-mc^2 \\ &= \hbar\omega_0\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)-\frac{3}{16}\left(\frac{\hbar\omega_0}{mc^2}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)^2+\dots\right] \end{aligned} \quad (53)$$

mit $n=0, 1, 2, \dots$ in guter Übereinstimmung mit dem störungstheoretischen Resultat auch für kleine Quantenzahlen.

Im *hochrelativistischen Limes* $(mc^2 \ll |E|)$ gilt $K^2=1-2\frac{mc^2}{E}+\mathcal{O}(m^2)$, was in (50) eingesetzt die Gleichung

$$\begin{aligned} &\frac{\hbar\omega_0}{mc^2}\left(n+\frac{1}{2}\right) \\ &\quad=\frac{8}{\pi}\left(\frac{E}{2mc^2}\right)^{3/2}\int_0^1(1-y^2)\,\mathrm{d}y\,[1+\mathcal{O}(m^2)] \end{aligned} \quad (54)$$

liefert. Mit $f_0=m\omega_0^2$ erhält man das Spektrum

$$E_n=\left(\frac{3\pi}{4}\right)^{2/3}\left(\frac{\hbar^2c^2f_0}{2}\right)^{1/3}\left(n+\frac{1}{2}\right)^{2/3}[1+\mathcal{O}(m^{4/3})] \quad (55)$$

mit $n=0, 1, 2, \dots$.

Den masselosen Fall ($m=0$) können wir auch exakt lösen. Die Eigenwertgleichung (44) für $m=0$, also

$$\tilde{\psi}''(k)-\frac{2}{f_0}(\hbar c|k|-E)\tilde{\psi}(k)=0, \quad (56)$$

mit den Randbedingungen $\tilde{\psi}(k)\to 0$ für $k\to\pm\infty$ besitzt gerade und ungerade Lösungen der Form

$$\tilde{\psi}(k)=\begin{cases} Ai\left[\left(\frac{2\hbar c}{f_0}\right)^{1/3}(k-E/\hbar c)\right] & \text{für } k>0, \\ \pm Ai\left[\left(\frac{2\hbar c}{f_0}\right)^{1/3}(-k-E/\hbar c)\right] & \text{für } k<0. \end{cases} \quad (57)$$

Diese $\tilde{\psi}(k)$ sind bei $k=0$ nur dann stetig und stetig differenzierbar, falls die Quantisierungsbedingung

$$g(E_n)=0 \quad (58)$$

mit

$$\begin{aligned} g(E) &= Ai\left[-\left(\frac{2\hbar c}{f_0}\right)^{1/3}E/\hbar c\right] \\ &\quad\cdot Ai'\left[-\left(\frac{2\hbar c}{f_0}\right)^{1/3}E/\hbar c\right] \end{aligned} \quad (59)$$

erfüllt ist. Bei der Zählung $n=0, 1, 2, \dots$ erhält man dabei für große Quantenzahlen n mit Hilfe der asymptotischen Form der Airy-Funktion gerade die WKB-Lösung (55) zurück.

[1] I. Sucher, J. Math. Phys. **4,** 17 (1963).

[2] I. W. Herbst, Commun. math. Phys. **53,** 295 (1977) and Add **55,** 316 (1977).

[3] L. J. Nickisch, L. Durand, and B. Durand, Phys. Rev. D **30,** 660 (1984).

[4] P. Cea, G. Nardulli, and G. Paiano, Phys. Rev. D **28,** 2291 (1983).

[5] P. Cea, P. Colangelo, G. Nardulli, G. Paiano, and G. Preparata, Phys. Rev. D **26,** 1157 (1982).

[6] E. Trübenbacher, Z. Naturforsch. **44a,** 801 (1989).

[7] Die Kovarianz der freien Gleichung $i\partial_t\psi_t(\boldsymbol{x})=\sqrt{m^2-\nabla^2}\,\psi_t(\boldsymbol{x})$ (hier sei $\hbar=1, c=1$) ist leicht einzusehen und seit langem bekannt. Nach Wigner [9] generieren die Operatoren

$$H=\sqrt{m^2+p^2},\ \boldsymbol{P}=\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{L}=-i\,\boldsymbol{p}\times\nabla_p,$$
$$\boldsymbol{N}=i\sqrt{m^2+p^2}\,\nabla_p-\boldsymbol{p}\,t \quad \text{(i)}$$

auf dem Raum der quadratintegrablen Funktionen über der Massenschale $\mathbb{H}_m=L_2(\mathbb{R}^3,(m^2+p^2)^{-1/2}\,\mathrm{d}^3p)$ eine unitäre Darstellung der orthochronen Poincaré-Gruppe. Durch die Transformation

$$\psi_t(\boldsymbol{x}):=\int\varphi_t(\boldsymbol{p})\frac{e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}}{(2\pi)^{3/2}}\frac{\mathrm{d}^3p}{(m^2+p^2)^{1/4}},\quad \varphi_t\in\mathbb{H}_m \quad \text{(ii)}$$

wird $\mathbb{H}_m$ isomorph auf den Ortsraum $L_2(\mathbb{R}^3, \mathrm{d}^3x)$ abgebildet, und die von Trübenbacher in [6] angegebene Darstellung der Lorentz-Gruppe (für $\vartheta=\frac{1}{2}$) ist einfach die durch (ii) induzierte Darstellung der Generatoren (i) auf $L_2(\mathbb{R}^3, \mathrm{d}^3x)$.

[8] H.-J. Briegel, B.-G. Englert u. G. Süssmann, Z. Naturforsch. **46a,** 933 (1991).

[9] E. P. Wigner, Ann. Math. **40,** 149 (1939).

[10] Obwohl wir die Variable $\boldsymbol{k}$ statt $\boldsymbol{p}=\hbar\boldsymbol{k}$ verwenden, behalten wir die Bezeichnung ‚Impulsraum' bei.

[11] Siehe zum Beispiel F. Constantinescu, Distributionen und ihre Anwendung in der Physik, Teubner, Stuttgart 1974, Kap. 8.3.

[12] $\Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right)$ ist meromorph bezüglich $\nu\in\mathbb{C}$

und regulär analytisch bezüglich $\nu \in \mathbb{C} \setminus 2\mathbb{Z}+1$, wo also die rechte Seite von (14) die analytische Fortsetzung der linken Seite definiert.

[13] Eine Alternative zu der hier vorgeführten Regularisierung besteht in der Einführung eines Dämpfungstermes bei der Berechnung des Integralkernes

$$\Omega_\varepsilon(\boldsymbol{x}) := \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\varkappa^2+k^2}\, \mathrm{e}^{i\,\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\, \mathrm{e}^{-\varepsilon\sqrt{k^2+\varkappa^2}}$$
$$= -\frac{\varkappa^2}{2\pi^2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\varepsilon^2}\frac{K_1(\varkappa\sqrt{x^2+\varepsilon^2})}{\sqrt{x^2+\varepsilon^2}},$$

was nach Multiplikation mit $\psi(\boldsymbol{x})$ und Integration über d^3x im Limes $\varepsilon \to 0$ freilich wieder auf (18) führt. Der zu Gleichung (18) bzw. (23) gehörige endliche Propagator wird auf diese Weise in [14] berechnet und die zeitliche Ausbreitung einiger kugelsymmetrischer Wellenpakete ausführlich diskutiert.

[14] H. Stierstorfer, Diplomarbeit an der LMU München, 1983.

[15] Die Gleichung $i\,\partial_t \psi_t(\boldsymbol{x}) = c\sqrt{-\Delta}\,\psi_t(\boldsymbol{x})$ wurde bereits 1930 von Landau und Peierls [16] diskutiert, allerdings ohne Berechnung des Integralkernes.

[16] L. Landau, R. Peierls, Z. f. Physik **62,** 188 (1930).

[17] Dasselbe gilt auch in d Dimensionen, wo in dem Integranden von (37) noch ein Maßfaktor k^{d-1} hinzukommt. Im nichtrelativistischen Fall wird (37) entsprechend zu

$$\Phi_0 \int_0^\infty \frac{k^{d-1}\,\mathrm{d}k}{k^2-2me} = \mathrm{const}, \quad e<0$$

mit einem ebenfalls divergenten Integral, außer für $d=1$.

[18] Das eindimensionale δ-Potential bei relativistischer Kinematik verhält sich dieser Hinsicht ähnlich dem zweidimensionalen nichtrelativistischen Problem

$$H = \frac{p_1^2+p_2^2}{2m} - \phi_0\,\delta(x_1,x_2), \quad \phi_0>0,$$

bei dem die kinetische und die potentielle Energie gleich skalieren, so daß $H \to \frac{1}{\lambda^2}H$. Mit derselben Argumentation und derselben Funktionenfolge $\tilde{\psi}_\nu$ (42) zeigt man auch hier die Unbeschränktheit. Da in höheren Dimensionen die kinetische Energie und die potentielle Energie mit verschiedenen Potenzen von λ skalieren, folgt die Unbeschränktheit der Hamilton-Operatoren mit attraktiven δ-Potentialen nach unten unmittelbar, und den einzig guten Hamilton-Operator dieser Sorte liefert somit das eindimensionale nichtrelativistische Problem.

[19] W. Gröbner und N. Hofreiter, Integraltafel, 2. Teil, Nr. 332.51 b, Springer-Verlag, New York, 1973, 5. Auflage.

[20] Man prüft leicht nach, daß für $c\to\infty$ und $K = \frac{E-mc^2}{E+mc^2} =: \frac{e}{e+2mc^2} \to 0$ aus (50) der nichtrelativistische Grenzfall $E-mc^2 = \hbar\omega_0\left(n+\frac{1}{2}\right)\left[1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{c^2}\right)\right]$ folgt.